Von Plancks Gesetz zu Wiens Gesetz via Numerik!

T.P. Wihler, H.R. Schneebeli

Version vom 2. Juli 2016

Zusammenfassung

Das *Strahlungsgesetz von Planck* überwindet Probleme der klassischen Thermodynamik und leistet einen ersten Beitrag zur Quantentheorie. Das Gesetz von Wien wird aus dem Planckschen Gesetz hergeleitet. Das Beispiel zeigt die Rolle der Numerik neben jener von Algebra un Analysis. Sie ist wesentlich, weil Algebra und Analysis alleine die entscheidende transzendente Gleichung nicht zu lösen vermögen.

Numerische Löser sind unverzichtbar. Hier werden sie mit Analysis und Algebra kombiniert.

Voraussetzungen Grundkenntnisse über numerische Verfahren zum Lösen von Gleichungen [Bisektion, Fixpunktiteration, Newtonverfahren] Einsatz von Funktionsgraphen und von Lösern mit einem CAS oder einer Numerik-Toolbox. Elemente einer Programmiersprache.

Ziele Das Lösen von Gleichungen in realistischen Anwendungen anwenden. Dazu muss die numerische Methode im Kontext einer physikalischen Theorie angemessen eingesetzt werden. Methoden aus Algebra, Analysis und Numerik verbinden. Numerische Verfahren in einen grösseren Zusammenhang einbetten.

1 Das Strahlungsgesetz von Planck und das Wiensche Gesetz

Im Jahre 1900 markiert das von Planck entwickelte Strahlungsgesetz einen Wendepunkt in der Geschichte der Physik. Das Strahlungsgesetz von Planck steht am Ende einer Diskussion über Mängel der klassischen Physik und am Anfang einer neuen Physik, die mit der Quantenhypothese gewisse notorische Schwierigkeiten der klassischen Thermodynamik überwinden konnte. Planck modifizierte eine bereits hoch entwickelte klassische Physik, ein Lehrgebiet, das von der Mathematik des 19. Jahrhunderts gut durchdrungen war.

Mit dem Strahlungsgesetz von Planck lässt sich bestimmen, bei welcher Wellenlänge die Strahlungsleistung eines 'schwarzen Körpers' bei der absoluten Temperatur T am grössten ist? Nimmt man nun an, dass ein Stern wie ein 'schwarzer Körper' elektromagnetische Wellen abstrahlt, so lässt sich aus der Energieverteilung im Farbspektrum die Temperatur der Lichtquelle ermitteln. Die Grundlage dazu liefert das Wiensche Gesetz. Seine Herleitung aus dem Gesetz von Planck erfordert ein Kombination von Analysis, Algebra und Numerik.

Das Gesetz von Planck wird statt begründet nur kurz kommentiert, damit die verwendeten Begriffe erfassbar werden. Planck hat ein Modell gefunden, das eine mathematische Behandlung erlaubt und das offensichtliche Unstimmigkeiten, ja gar absurde Folgerungen der damaligen Physik vermeiden kann.

Der Bericht von Planck über die Entdeckung der Strahlungsformel [1] zeigt: Das Gesetz beruht auf vereinfachenden Idealisierungen und auf einer damals neuartigen Arbeitshypothese: Wenn elektromagnetische Strahlung der Frequenz ν ausgestrahlt oder absorbiert wird, so ist das nur in diskreten Energiepaketen der Grösse $E = h \cdot \nu$ möglich. Dabei ist $h > 0$ eine Naturkonstante, die Planck eingeführt hat. Der 'schwarze Körper' existiert in der Natur so wenig wie das Zweikörpersystem. Der Begriff wurde um 1860 von Kirchhoff auf eine Weise eingeführt, dass er einige ideale Eigenschaften fordert, die eine theoretische Behandlung mit den damaligen Mitteln ermöglichen sollen. Ferner sollen sich reale Körper mit den angenommenen Eigenschaften im Labor wenigstens angenähert präparieren lassen oder mit etwas Kompromissbereitschaft in der Natur finden. Beim Erkennen der Farbe *schwarz* beurteilen Menschen allerdings nur, ob im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums alle Strahlung absorbiert wird. Die Definition von Kirchhoff dehnt diese Eigenschaft der schwarzen Farbe auf *alle* Wellenlängen aus.

Der schwarze Körper würde durch einen Hohlraum im thermischen Gleichgewicht mit seinen Wänden realisiert, welche die absolute Temperatur T haben und für jegliche elektromagnetische Strahlung völlig undurchlässig sind.

Zu bedenken ist zudem: In das Gesetz von Planck gehen mehrere Naturkonstanten ein, also Grössen, die mit beschränkter Genauigkeit gemessen werden oder deren Wert, wie bei der Lichtgeschwindigkeit durch ein Postulat im System der physikalischen Masseinheiten festgelegt wird.

Bei welcher Frequenz oder bei welcher Wellenlänge erreicht die Strahlungsleistung des schwarzen Körpers ihr Maximum? Diese Frage führt auf eine Gleichung, die letztlich numerisch gelöst werden muss. Die Antwort wird also eine Näherung sein. Das ist viel besser als keine Antwort und es ist der Frage absolut angemessen, weil ja auch die zu lösende Gleichung auf einem Denkmodell und nicht auf absolut exakten Naturgesetzen beruht. Zu erwarten ist eine pragmatisch gefundene gute Beschreibung für einen idealisiert beschriebenen Sachverhalt. Keine noch so exakte Lösung der auftretenden Gleichungen könnte unser Naturverständnis vertiefen, denn wir arbeiten immer auf der Grundlage von Modellvorstellungen.

2 Das Gesetz von Planck

Das Gesetz von Planck wird traditionell oft als Gleichung geschrieben. Die sogenannte 'Gleichung von Planck' beschreibt eine Dichtefunktion $J : \lambda \mapsto J(\lambda)$ für die Verteilung der Leistung der thermischen Ausstrahlung eines schwarzen Körpers der Temperatur T Abhängig von der Wellenlämnge λ der Strahlung. Ferner sind c die Lichtgeschwindigkeit, h das Wirkungsquantum (Plancksche Konstante), und k die Boltzmannkonstante.

Das Strahlungsgesetz von Planck mit der Wellenlänge als Variable lautet in Funktionsschreibweise:

$$J : \lambda \mapsto 2\pi \cdot c^2 \cdot h \cdot \frac{1}{\lambda^5 \cdot \left(\exp(\dfrac{c \cdot h}{\lambda \cdot k \cdot T}) - 1)\right)}$$

Der Funktionswert $J(\lambda)$ gibt an, wie gross die Strahlungsleistung des schwarzen Körpers bei der Wellenlänge λ ist. Genauer: Im Bereich der Wellenlängen von λ und $\lambda + \Delta\lambda$ beträgt die Strahlungsleistung etwa $J(\lambda) \cdot \Delta\lambda$ und zwar umso genauer, je näher $\Delta\lambda$ bei 0 ist.

Es gibt eine zweite Beschreibung des Phänomens. Sie benutzt die Frequenz ν der Strahlung als Variable $\mathcal{J} : \nu \mapsto \mathcal{J}(\nu)$. Diese Formulierung hat die Gestalt

$$\mathcal{J} : \nu \mapsto \frac{2\pi \cdot h}{c^2} \cdot \frac{\nu^3}{\exp(\dfrac{h \cdot \nu}{k \cdot T}) - 1}$$

Lassen wir die Graphen der Funktionen $J : \lambda \mapsto J(\lambda)$ und $\mathcal{J} : \nu \mapsto \mathcal{J}(\nu)$ für verschiedene Werte von T auftragen, so ergeben sich folgende Abbildungen:

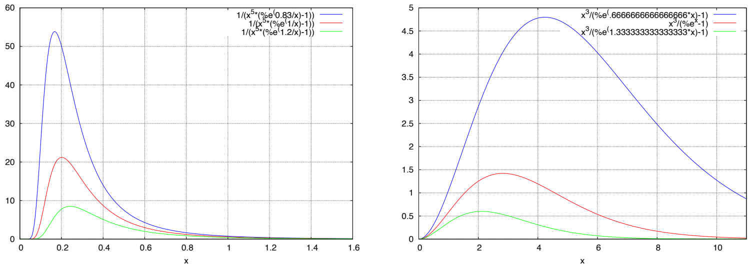

Abbildung 1: Leistungsdichten J (links) und $\mathcal{J}$ (rechts) der Schwarzkörperstrahlung für drei Temperaturen $T_1 > T_2 > T_3$, (nicht auf SI-Einheiten skaliert)

Die Graphik legt nahe, dass die Temperatur des Strahlers das Maximum der Strahlungsintensität im Spektrum systematisch verschiebt. Trifft dies wirklich zu, so könnte man umgekehrt die Temperatur T eines schwarzen Körpers aus der Intensitätsverteilung im elektromagnetischen Spektrum ableiten, wenn funktionale Zusammenhänge je zwischen der Temperatur T und der Maximalstelle λ_{max} beziehungsweise der Maximalstelle ν_{max} gefunden werden. Das zu tun, ist unser nächstes Ziel.

3 Wo liegt die Maximalstelle von J ?

Wir wählen einen Wert der Temperatur T beliebig und betrachten ihn von nun an als Konstante. Ferner wird vorerst ausschliesslich die Funktion $J : \lambda \mapsto J(\lambda)$ behandelt. Die analoge Aufgabe für $J : \nu \mapsto J(\nu)$ wird in den Übungen gestellt.

Es ist hilfreich, bei den folgenden Überlegungen und Berechnungen zu bedenken, dass es jeweils nur eine einzige Variable gibt. Alle anderen Symbole bezeichnen Konstanten. Ist man sich dieser Tatsache bewusst, so wird klar, dass eigentlich nur relativ einfache Funktionen auftreten. Die Funktion J lässt sich mit geeignet definierten Konstanten a und b beispielsweise so schreiben:

$$J : \lambda \mapsto \frac{a}{\lambda^5 \cdot (\exp(b/\lambda) - 1))}$$

Die gesuchte Maximalstelle λ_{max} von J ist positiv und hängt nicht vom konstanten Faktor $a > 0$ ab. Durch eine geeignete Substitution lässt sich auch die Rolle von b trivialisieren.

Mit einer neuen Variablen $x := \lambda/b$ gilt $\lambda = b \cdot x$ Also ist

$$J(\lambda) = J(b \cdot x) = C \cdot \frac{1}{x^5 \cdot (\exp(1/x) - 1)} \quad \text{mit der Konstanten } C := a/b^5 > 0$$

Folglich reicht es, wenn die Maximalstelle $x_0 > 0$ der Hilfsfunktion

$$j : x \mapsto \frac{1}{x^5 \cdot (\exp(1/x) - 1)}$$

bestimmt wird. Also suchen wir die Hilfsgrösse x_0 als einzige positive Nullstelle der Ableitung j'. Vom Quotienten

$$j'(x) = \frac{5x^4(\exp(1/x) - 1) - x^3 \exp(1/x)}{x^{10}(\exp(1/x) - 1)^2}$$

interessiert nur die Zählernullstelle $x_0 > 0$, also die Lösung von

$$5x(\exp(1/x) - 1) - \exp(1/x) = 0$$

Der Löser eines CAS-Rechners ist in der Lage, eine Näherungslösung zu dieser Gleichung zu finden. Wir wollen eine weitere Umformung zur Vereinfachung vornehmen und dann numerische Verfahren selbst testen. Mit der Hilfsgleichung $s := \exp(1/x)$ wird $x = 1/\ln(s) > 0$ für $s > 1$. Substitution liefert schliesslich die Gleichung.

$$\frac{5}{\ln(s)}(s - 1) - s = 0$$

Auch diese Gleichung lässt sich nicht algebraisch lösen. Wir prüfen der Reihe nach die folgenden drei numerischen Verfahren:

1. Bisektion für $f(s) = 0$
2. Fixpunktiteration mit $g(s) := f(s) + s$
3. Newtoniteration für $f(s) = 0$

Bisektion verlangt ein Intervall I, in welchem ein Vorzeichenwechsel bei $f(s)$ stattfindet. Eine quantitativ richtige graphische Darstellung des Graphen von f wäre hilfreich, aber sie ist ohne Hilfe eines Computers nicht zu schaffen. Die Computerdarstellung des Graphen beruht auf einer Wertetabelle. Versuchen wir, eine Wertetabelle zu erstellen: $f(10) \approx 9.5$, $f(100) \approx 7.5$, $f(200) \approx -12.2$ Damit ist ein Startintervall $[100, 200]$ gefunden. Angenommen, das Ergebnis soll auf 8 Dezimalziffern exakt sein, dann sind etwa $8/\log(2) \approx 27$ Bisektionsschritte nötig. Insgesamt wurde die Funktion dann etwa 30 mal ausgewertet.

Fixpunktiteration benötigt ein Intervall H, auf dem die Funktion g kontrahierend ist. Dazu genügt, dass $|g'(s)| \leq C < 1$ gilt für ale $s \in H$. Es ist realistisch, eine Wertetabelle von $g'(s)$ mit $100 < s < 200$ zu erstellen, aber diese Tabelle liefert keine sichere Begründung für die Kontraktionseigenschaft von g. Statt Zeit mit der unsicheren Tabelle zu verlieren, könnten wir einfach mal auf gut Glück drauflosrechnen. Wie beim Bisektionsverfahren könnte erst eine grobe Eingrenzung mit $x_0 = 100$ angenommen werden. Ein kleines Programm automatisiert die Funktionsiteration. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die Experimente.

Newtoniteration verlangt einen 'hinreichend' guten Startwert und die Vorbereitung der Iterationsformel $s_{n+1} := s_n + f(s_n)/f'(s_n)$. Wir machen ein Experiment mit dem gleichen Startwert wie bei der Fixpunktiteration von Tabelle 1. Wiederum lohnt es sich, den Rechengang zu automatisieren.

Offensichtlich ergeben zwei ganz verschiedene Verfahren vergleichbare numerische Näherungen. Wir haben *keinen formalen Beweis* für die Konvergenz des Iterationsverfahrens. Die *Einsetzprobe* mit den Näherungswerten gibt die Antworten $f(143.324921) \approx 1.15 \cdot 10^{-7}$ (Fixpunktiteration) und $f(143.324921594) \approx 10^{-11}$ (Newtonverfahren) erst die Kontrolle mit $f(143.324921595) \approx -1.8 \cdot 10^{-10}$ liefert ein Indiz, dass der Vorzeichenwechsel eine Nullstelle

Tabelle 1: Langsame Konvergenz der Fixpunktiteration

n	x_n
0	100
1	107,48...
10	137,69...
20	142.66...
30	143.24...
40	143.316...
50	143.323...
...	...
99	143.324921...

Tabelle 2: Rasche Konvergenz des Newtonverfahrens

0	100
1	150.7...
2	143.43...
3	143.3249...
4	143.324921594

zwischen den beiden letzten Näherungswerten andeutet – falls wir darauf vertrauen, dass die Funktionsberechnungen 'hinreichend exakt' sind und wir nicht dem Spiel der Rundungsfehler aufgesessen sind.

Jeder Iterationsschritt benötigt beim Newtonverfahren zwei teure Funktionsberechnungen, je eine für f und für f'. Dennoch lohnt sich sein Einsatz.

Wir sind noch nicht ganz am Ziel: Mit $s \approx 143.324921594$ folgt $x \approx 2.01405235273 \cdot 10^{-1}$ und daraus

$$\boxed{\lambda_{\text{max}}(T) \approx 2.8977684 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{T}\ [\text{m}]} \quad \text{(in SI-Einheiten)}$$

Dieses Ergebnis ist bekannt unter dem Namen *Wiensches Verschiebungsgesetz.*

Der gegenwärtig beste experimentelle Wert der Konstanten im Verschiebungsgesetz von Wien ist $W = (2.8977721 \pm 0.0000026) \cdot 10^{-3}$ m$\cdot$ K [16.5.2009]

Ein Beispiel zum Verschiebungsgesetz von Wien Angenommen, die Sonne leuchte wie ein schwarzer Körper. Die Intensitätsverteilung der Strahlung im optischen Bereich lässt sich ausmessen. Man findet durch Messung ein Maximum bei $\lambda \approx 500 \cdot 10^{-9}$ m im Bereich des grünen Lichtes. Mit dem Verschiebungsgesetz lässt sich die absolute Temperatur T der Schicht abschätzen, die das Licht aussendet. Rechnung ergibt $T \approx 5800$K.

4 Aufgaben zum Gesetz von Wien

1. Die Tagseite des Mondes hat eine absolute Temperatur von etwa 405 K, die Nachtseite eine solche von rund 115 K. Nehmen wir an, die Mondoberfläche strahle wie ein

schwarzer Körper. Bei welcher Wellenlänge strahlen der Vollmond beziehungsweise der Leermond am hellsten?

2. [setzt ein CAS voraus]
   Versuchen Sie, das Gesetz von Wien mit Hilfe eines CAS aus dem Strahlungsgesetz von Planck herzuleiten, indem Sie

   (a) eine Optimierungsaufgabe für die Funktion J oder $\mathcal{J}$ formulieren und diese lösen lassen.

   (b) das Problem auf eine Nullstellenbestimmung von $\dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\lambda}$ oder von $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}\nu}$ reduzieren und die Lösungen der Gleichungen vom CAS berechnen lassen.

3. Wie genau sind die Naturkonstanten c, h, k bekannt, die in der Strahlungsformel auftreten? Welche Genauigkeit ist also höchstens möglich in der Formel für λ_{max}?

4. Welches Problem ergibt sich, wenn aus Messungen der Strahlungsintensität die *Maximalstelle* λ_{max} gefunden werden soll? Argumentieren Sie für folgende beiden Fälle;

   (a) Die Messungen erfolgen digital und tasten eine Intensitätskurve $\tilde{J}$ bei diskreten Werten von λ ab.

   (b) Die Messungen sind analog und die Ergebnisse werden als Funktionsgraph auf Papier oder an einem Bildschirm ausgegeben.

   Wie lässt sich die Maximalstelle angenähert bestimmen, wenn die Daten als Liste von Dezimalzahlen vorliegen? Wie, wenn sie in analoger Form als Funktionsgraph gegeben sind? Argumentieren Sie anhand von Skizzen. Geben im Falle der digitalen Daten eine Vorschrift in Stichworten, die auch in einem verständlichen Pseudocode formuliert sein kann.

5. (a) Bestimmen Sie ν_{max} nach dem Muster der Berechnung von λ_{max} aus dem Gesetz von Planck.

   (b) Gilt die Beziehung $\nu_{\mathrm{max}} \cdot \lambda_{\mathrm{max}} = c$ für Ihre Lösung? Ist diese Beziehung notwendig für eine korrekte Antwort, wenn λ_{max} korrekt bestimmt wurde? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

5 Lösungen

1. $7.15 \cdot 10^{-6}$ m (Vollmond), $2.52 \cdot 10^{-5}$ m (Leermond)

2. Die aktuell (2011) verfügbaren CAS-Taschenrechner sind zu wenig leistungsstark für diese Aufgabe. Sie schaffen aber die Nullstellenbestimmung mit numerischen Näherungsverfahren nach der algebraischen und analytischen Vereinfachung auf eine Gleichung ohne zusätzliche Parameter.

3. gemäss [Formeln und Tafeln, Orell Fuessli 2010], Boltzmannkonstante mit maximal 8 Dezimalziffern. Das Ergebnis ist nach einer verbreiteten Faustregel höchstens mit 8 Dezimalziffern sinnvoll. Die empirische bestimmten Maximalstellen für J oder $\mathcal{J}$ dürften wesentlich ungenauer sein.

4. (a) Das Maximum der Abtastwerte ist in der Regel nicht gleich dem Maximum der Funktion. Aus der Abtastung lässt sich die Funktion nur ausnahmsweise exakt rekonstruieren, zum Beispiel bei Polynomfunktionen, wenn genügend viele Abtastwerte vorliegen. Eine pragmatische Lösung könnte so aussehen:
   - Suche das Maximum der Abtastwerte, es sei w_r
   - Wähle die k unmittelbaren Vorgängerwerte von w_r und die k unmittelbaren Nachfolger. Dabei ist k so zu bestimmen, dass die Vorgängerwerte monoton ansteigen und die Nachfolgerwerte monoton abfallen und die gewählten Punkte in der Umgebung der erwarteten Extrema liegen.
   - Benutze ein Regressionspolynom niedrigen Grades, um aus den $2k+1$ Werten die Funktion angenähert zu rekonstruieren.
   - Lass den Graphen aufzeichenen und beurteile die Plausibilität des Graphen. Hat er genau ein Maximum in der Nähe von w_r?
   - Falls Ja, bestimme dieses Maximum analytisch oder numerisch.

   (b) Mit analogen Aufzeichnungen ist die exakte Lage eines Maximums aus der Graphik nicht klar erkennbar, weil die Linienbreite nicht genau erkennen lässt, wo eine horizontale Tangente den Graphen genau berührt. (vgl schleifender Schnitt)

   Ein Ausweg besteht darin, beispielsweise 3 Horizontale zu wählen, die den Graphen in einer Umgebung des Maximums *transversal* schneiden, dann sind 6 Schnittpunkte mit annehmbarer Genauigkeit digitalisierbar. Mit ihnen wird ein Regressionspolynom vom Grad höchstens 4 bestimmt. Der Graph der Regression wird auf Passgenauigkeit im Bereich des Maximums getestet. Im Falle guter Übereinstimmung wird das Maximum der Regressionsfunktion in der Nähe des erwarteten Maximums numerisch oder analytisch bestimmt.

5. Die Konstanten $A := 2\pi \cdot h \cdot c^{-2}$ und $B := h/(k \cdot T)$ in der Funktion $\mathcal{J}$ lassen sich durch Umskalieren der Masseinheiten eliminieren. Dabei bleibt der Einfluss auf die Maximalstelle unter Kontrolle.

   Weil A die Lage der Maximalstelle *nicht* beeinflusst, betrachtet man zuerst die Funktion $\tilde{\mathcal{J}} : \nu \mapsto \mathcal{J}(\nu)/A = \dfrac{\nu^3}{\exp(B \cdot \nu) - 1}$.

   Nun wird die Variable ν ersetzt durch $x := B \cdot \nu$. Einsetzen von $\nu := x/B$ in $\tilde{\mathcal{J}}$ ergibt die Funktion $\hat{\mathcal{J}} : x \mapsto \dfrac{x^3}{\exp(x) - 1}$. Aus deren Maximalstelle $x_m > 0$ findet man $\nu_{\max} = x_m/B$.

   $$\hat{\mathcal{J}}'(x) = 0 \quad \text{und } x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3 - x) \cdot \exp(x) - 3 = 0$$

   Lösung mit Gleichungslöser eines CAS-Taschenrechners möglich. Alternative: Im Graph von $\hat{\mathcal{J}}$ die Maximalstelle schätzen und mit Newtonverfahren verbessern. Mit der Lösung $x = 2.8214393\ldots$ findet man das Gesetz von Wien in der Version für Frequenzen $\nu_{\max}$ als lineare Funktion der absoluten Tempratur T:

   $$\nu_{\max}(T) \approx 2.8214393 \cdot k \cdot T/h \approx 5.878933 \cdot 10^{10} \cdot T$$

   Die Beziehung $\lambda \cdot \nu = c$, die für Wellenlänge und Frequenz derselben rein harmonischen Schwingungen gilt, bleibt bei der Anwendung der beiden Formen des Strahlungsgesetzes auf Schwarzkörperstrahlung *nicht* erhalten. Es gilt für alle T

   $$\lambda_{\max} \cdot \nu_{\max}(T) \approx 1.7036 \cdot 10^8 \; [\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}] \neq c$$

Die Dichteverteilung der Strahlungsintensität hängt davon ab, ob sie über der Wellenlänge oder über der Frequenz aufgetragen wird und der Begriff 'maximale Dichte der Strahlungsintensität' macht erst Sinn, wenn die Variable bekannt ist, mit der diese Dichte beschrieben wird. [vgl Abb. 1]

Das Ergebnis zeigt, wie wichtig eine einwandfreie mathematische Notation in kritischen Fällen ist. Die beiden Funktionen für die Intensitätsdichten $J : \lambda \mapsto J(\lambda)$ und $\mathcal{J} : \nu \mapsto \mathcal{J}(\nu)$ beschreiben nicht denselben Sachverhalt. Es ist angebracht, sie unterschiedlich zu kennzeichnen. Würden im Spektrum lauter isolierte Spektrallinien erscheinen, so könnten diese individuell erfasst und bei der Parameteränderung verfolgt werden. Benutzt man aber einen Mittelwert über ein Intervall endlicher Breite, so werden alle Intensitäten, die in diesem festen Intervall anfallen, aufsummiert. Damit kann sich diese mittlere Intensität durch Verschieben mehrerer Spektrallinien im Raster der Zählintervalle verändern, ohne, dass die einzelnen Intensitäten sich verändern. Die Nichtlinearität beim Parameterwechesel von λ nach ν verändert die relativen Abstände in einem vorerst als regelmässig gedachten Muster virtueller Spektrallinien in der einen Darstellung beim Wechsel zur anderen. (So kann man auf der Ebene von einzelnen Summanden einer Riemannsumme bei der Integration argumentieren. Im kontinuierlichen Spektrum wird eine Intensitätsverzerrung beim Parameterwechsel $\lambda \leftrightarrow \nu$ damit plausibel gemacht.)

Literatur

[1] Max Planck, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum, Sitzungsbericht der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Berlin, 14.12.1900