Von den Keplergesetzen zur Keplergleichung und zum Planetenort

T.P. Wihler, H.R. Schneebeli

Version vom 2. Juli 2016

Zusammenfassung

Die *Keplergleichung* steht am Übergang von der Planetenbeobachtung und Positionsbeschreibung in geozentrischer Sicht zur Modellierung von Planetenbahnen im heliozentrischen System. Die Keplergleichung wird geometrisch begründet und numerisch gelöst. Numerische Lösungsverfahren sind unverzichtbar. Hier werden sie erprobt.

Voraussetzungen Grundkenntnisse über numerische Verfahren zum Lösen von Gleichungen [Bisektion, Fixpunktiteration, Newtonverfahren] Einsatz von Funktionsgraphen und von Solvern mit einem CAS oder einer Numerik-Toolbox. Elemente einer Programmiersprache.

Ziele Das Lösen von Gleichungen in realistischen Anwendungen erfahren, Methoden vertiefen, numerische Verfahren in einen grösseren Zusammenhang einbetten.

1 Die Keplergleichung

Ab 1600 wurden bedeutende Fortschritte in der Beschreibung des Sonnensystems erzielt. Für diesen Entwicklungsschub gibt es mindestens drei Gründe:

1. *Tycho Brahe* hatte die Bewegung der Planeten mit zuvor unerreichbarer Genauigkeit beobachtet und protokolliert.
2. Das *Fernrohr* erlaubte erstmals die Beobachtung der Venusphasen und der vier grösseren Monde des Jupiter.
3. *Logarithmisches Rechnen* beschleunigte die umfangreichen Berechnungen, die nötig waren, um die vorhandenen Daten zu entschlüsseln. Es gelang Johannes Kepler, die Planetenbewegung im heliozentrischen Bezugssystem durch drei Gesetze zu charakterisieren und damit aus der Antike übernommene Modellvorstellungen zu überwinden. (Astronomia Nova, 1609)
    (a) Das *erste Keplergesetz* handelt von der geometrischen Form der Planetenbahnen: Im heliozentrischen System sind die Planetenbahnen eben. Genauer, es sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
    (b) Das *zweite Keplergesetz* handelt von der Bewegung eines einzelnen Planeten auf seiner Bahn:
    Der Planet bewegt sich so, dass die Verbindungsstrecke zwischen der Sonne und dem Planeten (Fahrstrahl) in je gleich grossen Zeitschritten gleich grosse Flächenstücke überstreicht. (Flächensatz)

(c) Das *dritte Keplergesetz* handelt streng genommen von einem Dreikörperproblem: Neben der Sonne werden *zwei Planeten* betrachtet. Dann gibt es zwischen ihren Umlaufzeiten T_i und den Grössen ihrer langen Bahnhalbachsen a_i eine Beziehung. Sie lautet: $T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3$.

Die *Keplergleichung* ist ein Hilfsmittel, das Kepler ersann, um die Position eines Planeten auf seiner Bahn zu bestimmen, wenn die Zeitspanne bekannt ist, seit der Planet letzmals am nächsten bei der Sonne stand (Periheldurchgang). Sie bezieht sich auf ein Zweikörperproblem und folgt mit geometrischen Überlegungen aus den ersten beiden Keplergesetzen.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Keplergleichung gefunden wird. Zudem ist bemerkenswert, dass zwingend numerische Näherungen benötigt werden, um mit der Keplergleichung Planetenpositionen bei vorgegebener Zeit zu berechnen. Verschiedene numerische Verfahren werden an diesem Beispiel erprobt.

2 Geometrie der Planetenbewegung: Keplergleichung

Vor Kepler wurde die Planetenbewegung als Überlagerung gleichförmiger Kreisbewegungen in geozentrischer Sichtweise extensiv betrieben. Die erreichte Genauigkeit von Voraussagen war beachtlich. Das heliozentrische Modell von Kopernikus vermochte sie nicht zu erreichen. Keplers Leistung bestand darin, im heliozentrischen Weltbild die Planetenbewegung mathematisch neu zu beschreiben. Er erreichte in einem heliozentrischen Modell eine Genauigkeit vergleichbar jener der damaligen geozentrischen Modelle. Kepler konzentrierte sich zunächst auf zwei Teilprobleme und löste diese:

1. Was ist die geometrische Form der Planetenbahnen und ihre Lage im Sonnensystem?

2. Wie bewegen sich Planeten auf ihrer Bahn?

Die Schlüssel zu den Antworten sind das erste und das zweite Keplergesetz.

Die Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne und die Gestalt der Bahnellipse lassen sich aus Beobachtungen von der Erde aus bestimmen. Kepler hat es in jahrelanger Arbeit getan. Insbesondere sind für jeden Planeten die Zeitpunkte $t_0, t_1, \ldots$ bekannt, zu denen er an einem bestimmten Punkt auf seiner Bahn steht, sagen wir beispielsweise am Punkt, der der Sonne am nächsten steht (Perihel).

Jeder Umlauf auf einer festen Bahn dauert jeweils gleich lange, denn der Fahrstrahl $\overrightarrow{FP_t}$ überstreicht in dieser Zeit die Fläche der Ellipse gerade einmal. Also gilt $T = t_1 - t_0 = \ldots t_{n+1} - t_n$. Bis auf Vielfache von T reicht es also, nur einen Umlauf zu betrachten. Kepler konnte im Rahmen seiner Gesetze für jeden Zeitpunkt t den zugehörigen Bahnpunkt P_t für jeden der damals bekannten Planeten bestimmen. Wir nehmen zur Vereinfachung noch an, dass durch $t_0 := 0$ der Zeitnullpunkt definiert sei. Dann ist $t_n = n \cdot T$ und der Flächensatz lässt sich in der einfachen Form schreiben: In der Zeit zwischen 0 und t überstreicht der Fahrstrahl eine Fläche $\mathcal{A}_t = \pi \cdot a \cdot b \cdot t/T$. Ferner benutzte Kepler eine normalisierte Zeit τ, die *mittlere Anomalie.*

Heute ist es üblich, die Definition $\tau := 2\pi \cdot t/T$ zu verwenden. Dann kann man sich τ als einen Winkel im Bogenmass denken, der proportional mit t wächst und es gilt

$$\mathcal{A}_t = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot \tau(t).$$

Die Abbildung 1 zeigt zwei weitere zeitabhängige Winkel u, die *exzentrische Anomalie* und w, die *wahre Anomalie*, die Kepler benutzte.

Obwohl u durch τ festgelegt wird, verändert sich u *nicht* proportional zur Zeit t. Die Keplergleichung stellt τ – und damit die Zeit t – als nichtlineare Funktion von u dar. Kepler verwendet die rein geometrische Grösse u, um den Planetenort zu bestimmen. Da man wissen will, wo sich der Planet zu gegebener Zeit t befindet, muss t in τ umgewandelt und die Keplergleichung nach u aufgelöst werden. Erst eine Generation nach Kepler hat Newton die Physik und die zugehörige Mathematik so weit entwickelt, dass es möglich wurde die Planetenbewegung als Folge der Gravitationsanziehung im Zweikörperproblem in einem modernen Sinn physikalisch zu formulieren.

Aus hinreichend vielen beobachteten Planetenpositionen lassen sich die wesentlichen Bahnparameter experimentell ableiten: Bahnebene und Lage der Ellipse im Raum, die Grösse der beiden Halbachsen a, b. Aus der numerischen Exzentrizität $\varepsilon := \sqrt{1-(b/a)^2}$ der Bahn lässt sich die Lage der Brennpunkte F_i berechnen. Im Koordinatensystem von Abbildung 1 gilt $F_i(\pm a\varepsilon|0)$. Wir bezeichnen mit $F := (a\varepsilon|0)$ die Position der Sonne. Die Keplergleichung ergibt

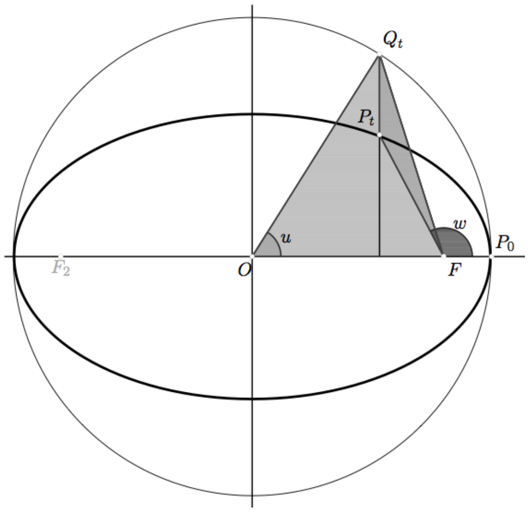

Abbildung 1: Ellipsenbahn: wahre Anomalie w, exzentrische Anomalie u

sich nun aus dem Flächensatz und der Geometrie der Ellipse wie folgt:

Die Ellipse in Abbildung 1 ist normal affines Bild ihres Umkreises. Die grosse Achse der Ellipse liegt auf der Affinitätsachse. Das Affinitätsverhältnis ist gleich dem Verhältnis b/a der Länge der kleinen Halbachse zur Länge der grossen Halbachse der Ellipse.

Es bezeichne P_t den Bahnpunkt des Planeten zur Zeit t. Zu P_t gehört ein Punkt Q_t, der sich synchron mit P_t auf dem Umkreis der Ellipse so bewegt, dass die Verbindung Q_tP_t immer senkrecht zur grossen Achse der Ellipse steht. Die normale Affinität zwischen Umkreis und Ellipse bildet das krummlinige Dreieck FP_0Q_t auf das vom Ellipsenbogen begrenzte krummlinie Dreieck FP_0P_t ab. Dabei schrumpft der Flächeninhalt mit dem Affinitätsfaktor b/a. Für die Inhalte der Dreiecke gilt also

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}(FP_0P_t) = \frac{b}{a}\,\mathcal{A}(FP_0Q_t).$$

Die Fläche $\mathcal{A}(FP_0Q_t)$ ist Differenz zwischen der Sektorfläche $\mathcal{A}(OP_0Q_t)$ und der Dreiecksfläche $\mathcal{A}(OFQ_t)$. Also ist

$$\mathcal{A}(FP_0Q_t) = \frac{1}{2}a^2 \cdot u - \frac{1}{2}\,a^2 \cdot \varepsilon \cdot \sin(u) = \frac{1}{2}a^2 \cdot (u - \varepsilon \cdot \sin(u))$$

Die Flächenverzerrung b/a der Affinität führt auf $\mathcal{A}_t = \frac{1}{2}\, a \cdot b \cdot (u - \varepsilon \cdot \sin(u))$. Aber nach dem Flächensatz gilt auch $\mathcal{A}_t = a \cdot b \cdot \tau/2$. So folgt die *Keplergleichung* nach Vereinfachung.

$$u - \varepsilon \cdot \sin(u) = \tau \;, \quad \text{wobei für Ellipsenbahnen } |\varepsilon| < 1 \text{ gilt}$$

Kepler selbst war sich bewusst, dass sich diese Gleichung formal nicht lösen lässt. Er tönt die Möglichkeit an, Tabellen zu erarbeiten und Näherungen durch Suchverfahren aufgrund der Tabellen zu finden. Derartige Tabellen sind überflüssig, seit es Computer gibt, aber der Speicher des Computers übernimmt die Rolle der von Kepler erwähnten Tabellen und mehr. Kepler stellte die Tabellen schliesslich selbst her. Weil er sie seinem Dienstherrn Kaiser Rudolph II widmete, heissen sie Rudolphinische Tafeln.

Bemerkungen zur Rolle der Keplergesetze und zu Newtons Mechanik.

Kepler hat nach 1600 die drei Gesetze über Planetenbewegungen aus Messdaten *induktiv* hergeleitet. Alle benutzten Daten stammen aus Beobachtungen im Sonnensystem. Newton hatte den Einfall, die Keplergesetze aus dem Gravitationsgesetz im Zweikörperproblem *deduktiv* herzuleiten. Das Gravitationsgesetz selbst entzog sich zur Zeit Newtons einer direkten empirischen Prüfung im Labor. Newtons Herleitung von 1686 zeigte: Aus den empirisch gefundenen Keplergesetzen ergeben sich keine Widersprüche zu einer hypothetischen Annahme des newtonschen Gravitationsgesetzes und der Mechanik Newtons. In Newtons Mechanik lassen sich die Bewegungsgleichungen eines Planeten als Differentialgleichungen auffassen. Die zugehörige Begriffsbildung und eine dazu gehörige Mathematik mussten allerdings erst entwickelt werden. Diese Entwicklung dauerte insgesamt bis etwa an die Schwelle des zwanzigsten Jahrhunderts.

Schon für Zweikörperprobleme ergibt Newtons Ansatz mehr Einsichten als jener von Kepler. Newton zeigte unter der Voraussetzung, dass sein Gravitationsgesetz gilt: *Alle Bahnen im Zweikörperproblem sind Kegelschnitte und der gemeinsame Schwerpunkt liegt im Brennpunkt der Bahnkurve.* Also sind auch Parabeln oder Hyperbeln, die in Keplers Daten fehlten, als Bahnen nicht auszuschliessen. Seine Methode ist viel allgemeiner anwendbar als jene Keplers. Mit Newtons Mechanik lässt sich einsehen, dass ein allgemeinerer Flächensatz für *alle* Bahnen im Zweikörperproblem mit allen zeitunabhängigen *Zentralkräften* gilt.

Allerdings ist schon das allgemeine Dreikörperproblem in der newtonschen Himmelsmechanik mathematisch so anspruchsvoll, dass sich Lösungen nur in Spezialfällen analytisch herleiten lassen. Wird die Mechanik Newtons mit Differentialgleichungen formuliert, so öffnet sich auch ein Zugang zur numerischen Näherungsrechnung durch Simulation der Bewegung von Sternsystemen. Simulationen des Sonnensystems über grosse Zeiträume zeigen, dass sich die Keplerellipsen unter dem Einfluss der gegenseitigen Anziehung der Planeten langsam verändern. Die Planung von Satellitenmissionen zum Erkunden des Sonnensystems ist ohne Hilfe der numerischen Bahnsimulation undenkbar.

Die klassische Himmelsmechanik steht und fällt mit der Antwort auf die Frage: Ist Newtons Gravitationsgesetz hinreichend exakt?

3 Die Keplergleichung numerisch lösen

Die Keplergleichung in der Gestalt $u = \varepsilon \cdot \sin(u) + \tau$ ist ein Fixpunktproblem. Wenn die Funktion $\varphi(u) := \varepsilon \cdot \sin(u) + \tau$ kontrahierend ist, lässt sich der Fixpunkt mit Iteration annähern. Hinreichend ist, dass es eine Konstante C gibt, für die die Bedingung $|\varphi'(u)| \leq C < 1$ für alle u im Bereich $0 \leq u \leq \pi$ erfüllt wird. Eine solche Konstante ist $C = |\varepsilon|$.

Das heisst: Im Prinzip führt Fixpunktiteration bei allen Ellipsenbahnen beim Keplerproblem zum Ziel. Im Sonnensystem sind die Planetenbahnen fast kreisförmige Ellipsen, das heisst $\varepsilon \approx 0$. Wir erwarten also eine rasche Konvergenz beim Iterationsverfahren. Es bleibt die Frage nach einer geschickten Wahl eines Startwertes. Da Planetenbahnen geringe Exzentrizitäten aufweisen, ist ihr Lauf in etwa gleichförmig, also ist $u_0 = \tau$ ein plausibler Startwert.

Die Konvergenz lässt sich mit Newtoniteration verbessern. Dazu schreiben wir die Keplergleichung als Nullstellenproblem

$$k(u) := u - \varepsilon \cdot \sin(u) - \tau = 0$$

Im Gegensatz zur Funktionsiteration benötigt die Newtoniteration keine Bedingung für ε. Sie taugt also auch für Parabeln und Hyperbeln, die bei Bahnen von Kometen, welche dem Sonnensystem einen einzigen Besuch abstatten, als Näherungen postuliert werden. Iteration einer kontrahierenden Funktion findet von jedem Startwert aus den Fixpunkt. Das Newtonverfahren konvergiert in der Regel nur lokal sehr schnell, das heisst, wenn ein Startwert hinreichend nahe bei einer Lösung verwendet wird.

4 Aufgaben zur Keplergleichung

Wir betrachten zwei Varianten zu einem Zweikörperproblem. Beide Planeten seien gleich gross und sehr klein so, dass ihre gegenseitige Anziehung vernachlässigbar ist.

Planet A umkreist die Sonne im Abstand 1 auf einer Kreisbahn in einer Zeiteinheit.

Planet B umkreist die Sonne auf einer Ellipse, deren grosse Halbachse ebenfalls die Grösse 1 hat. Der Minimalabstand von B zur Sonne beträgt 2/5. Er startet zur Zeit $t = 0$ im Punkt P_0, der am nächsten bei der Sonne liegt.

Fragen

1. Wie lange dauert ein Umlauf von Planet B?
2. Wie lange ist die kleine Halbachse beim Planeten B?
3. Wie schnell bewegt sich Planet B, wenn er
   (a) der Sonne am nächsten kommt?
   (b) am weitesten von der Sonne entfernt ist?
   (c) den Nebenscheitel der Ellipse passiert?
4. (a) Wo befindet sich Planet B zu den Zeiten $t_k := k/12$, $k = 1,\ 2, \ldots 12$?
   (b) Wie gross sind die wahren Anomalien w_k und die Abstände zur Sonne r_k für die Zeitpunkte t_k? Wie lässt sich der Berechnungsaufwand für die 12 Bahnpunkte auf die Hälfte reduzieren?
   (c) Stellen Sie die Bahnen der Planeten A und B unverzerrt und im gleichen Koordinatensystem dar. Welches sind die Positionen von A und von B für die Zeiten t_k? Was zeigt die fertige Graphik?

5. Angenommen, Planet A startet im Punkt $(1|0)$ und Planet B im Perihel $(0.4|0)$ zur Zeit $t = 0$ und sie bewegen sich beide entgegen dem Uhrzeigersinn.
   (a) Wo kreuzen sich die Bahnen von Planet A und Planet B?
   (b) Wann befindet sich A jeweils an den Kreuzungspunkten, wann B?
6. Wann befindet sich Planet B in den Nebenscheiteln seiner Bahn?

Lösungsskizzen

1. gleich wie Planet A, (3. Keplergesetz), 1 Zeiteinheit.
2. $b = a \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2} = 4/5$, $F(0.6|0)$
3. Flächensatz: $\pi \cdot a \cdot b/T = 0.2 \cdot v_{\text{max}} = 0.8 \cdot v_{\text{min}} = 0.4 \cdot v_{\text{NS}}$,
   $v_{\text{max}} = 4\pi,\ v_{\text{min}} = \pi,\ v_{\text{NS}} = 2\pi$
4. Die Ergebnisse sind als Näherungen in der folgenden Tabelle zusammengefasst Die

   Tabelle 1: Näherungswerte für u, w, r abhängig von τ

τ	u	w	r
0	0	0	0.4
$\pi/6$	1.0415	1.707	0.69704
$\pi/3$	1.6455	2.272	1.04479
$\pi/2$	2.0913	2.578	1.29840
$2\pi/3$	2.4685	2.7952	1.4691
$5\pi/6$	2.8121	2.9757	1.5677
π	π	π	1.6

   fehlenden Daten ergeben sich aus der Spiegelsymmetrie der Ellipsenbahn.
5. Planet A hat immer Abstand 1 von F. Planet B habe bei der mittleren Anomalie u_1 Abstand 1 von F. Also $(\cos(u_1) - 0.6)^2 + (0.8 \cdot \sin(u_1))^2 = 1$. Daraus folgt $|u_1| = \pi/2$, also $2\pi \cdot t_B = \tau_B = u - 0.6 \cdot \sin(u)$ und $t \approx 0.1545$. Für Planet A gilt $u_A = w_A = \tau_A = w_B$ im Kreuzungspunkt. Gemäss Tabelle 1 folgt $t_A \approx 2.578/(2\pi) \approx 0.4103$. Planet A kreuzt den ersten Bahnpunkt nach B, aber er überholt B, der als zweiter den zweiten Kreuzungspunkt erreicht (Flächensatz). Wenn B einen Hauptscheitel der Ellipse erreicht, liegen A, B, F jeweils auf *einer* Geraden.
6. $u = \pi/2$, $\tau = \pi/2 - \varepsilon$, $t = \frac{T}{2\pi} \cdot \tau \approx 0.1545$

Literatur

Ralph Strebel, Die Keplersche Gleichung, Grüner Bericht, ETH, 2001
Formeln und Tafeln, DMK/DPK, Orell Füssli 2010