NUMERISCHE GLEICHUNGSLÖSER UND PHYSIK

H.R. SCHNEEBELI, T.P. WIHLER

1. Motivation

Die Quadratur des Kreises ist beweisbar mit Zirkel und Lineal nicht möglich. Dennoch hat Archimedes ein Verfahren ersonnen, das es gestattet, den Inhalt eines Kreises bis auf eine beliebig vorgegebene positive Toleranz numerisch anzunähern. Seither hat sich die Idee bewährt, dass sich schwierige oder unlösbare Probleme oft in einer sinnvoll abgeschwächten Form bewältigen lassen, indem statt einer formal exakten Antwort eine Näherung innerhalb vorgegebenen positiven Toleranz angestrebt wird. Im Idealfall kann diese positive Toleranz beiliebig vorgegeben werden. In der Praxis setzt das verwendete Werkzeug eigene Grenzen, etwa die Rechnerarithmetik, der Speicherplatz oder die Rechenzeit.

Es gibt Beispiele aus der Entwicklung des physikalischen Weltbildes, wo an entscheidender Stelle numerische Verfahren eingesetzt wurden. In der Regel erzeugt das Auflösen von Gleichungen kaum physikalische Einsichten. Hingegen ist die Einsicht wesentlich, dass die Physik sehr oft mit Daten begrenzter Genauigkeit rechnen muss. Fast alle Grundkonstanten werden durch Messungen bestimmt und nicht durch Axiome absolut exakt festgelegt. In der Modellbildung werden manchmal ganz früh schon Vereinfachungen angenommen, um die Komplexität der Aufgaben in beherrschbaren Grenzen zu halten. Daher spricht viel dafür, neben analytischen und algebraisch exakten Methoden auch numerische Näherungen einzusetzen und dabei wie bei einem physikalischen Experiment die Verfahrensfehler abzuschätzen. Sie sind vernachlässigbar, wenn sie um Grössenordnungen kleiner sind als die Unsicherheiten in der Modellbildung selbst.

Die Beilage handelt von zwei Entwicklungsschritten in der Physik, die als wesentlich gelten:

- Keplers heliozentrische Beschreibung des Planetensystems und die Beschreibung der Plantenbewegung ohne Kenntnis eines Kraftgesetzes.
- Die Herleitung des Verschiebungsgesetzes von Wien aus dem Strahlungsgesetz von Planck, das die Quantenhypothese in die Physik einführte.

Kepler wie Planck haben traditionelle Schranken überwunden und neue Wege geöffnet. Ohne numerische Gleichungslöser wäre keine der beiden Ideen fruchtbar geworden. Newton hat nach Kepler die Himmelsmechanik grundsätzlich neu aufgebaut und Heisenberg und Schrödinger haben eine Quantenmechanik formuliert, die über die Anfänge von Plancks Strahlungsgesetz weit hinausreicht. Parallel und gleichzeitig zur Physik hat

Date: 25. November 2011.

sich jeweils auch die Mathematik erweitert. Diese Erweiterungen übersteigen bald die Möglichkeiten einer angemessenen Behandlung im Gymnasium. Darum bescheiden wir uns mit der Rolle der Numerik als Türöffner auch in der Physik.

2. Verwendung der Beispiele im Unterricht in PAM

Die Beispiele sind Entwurfsfassungen aus einem geplanten umfassenderen Text zur Numerik im Rahmen von *Anwendungen der Mathematik*. Für ihren Einsatz im Unterricht gilt die Annahme, dass die Arbeitsweise von numerischen Gleichungslösern bereits geläufig ist, zum Beispiel das Bisektionsverfahren, die Fixpunktiteration oder das Verfahren von Newton-Raphson. Nach dieser Vorbereitung wird mit den Beispielen aus der Physik der Sinn und Nutzen von numerischen Methoden für Anwender belegt. Wer nicht auf die Wirkungsweise von numerischen Solvern eintreten mag, kann optional die Numerikprozeduren eines Grafikrechners oder eines CAS-Rechners als black-box benutzen. Damit lassen sich beide Themen aus der Sicht der Physik angemessen behandeln. Wer die numerischen Methoden ausleuchten will, muss etwas mehr in die mathematische Vorbereitung investieren.

Zu beiden Themen gehören Aufgaben. Sie betreffen auch Fragen zur Numerik, die obsolet werden, wenn diese an eine black-box delegiert wird. Es ist durchaus sinnvoll, dass auch Physiker sich über numerischer Verfahren Gedanken machen. Wir verdanken Newton einen der wirkungsvollsten Löser. Zeigen Sie seinen Nutzen auch für die Physik!