

Einfache Modelle zur Finanzmathematik

H.R.Schneebeli

Version vom 6. November 2013

Zusammenfassung

Finanzmathematik ist ein Anlass zur Modellbildung mit Wachstums- und Zerfallsprozessen. Insbesondere werden lineares Wachstum, quadratisches Wachstum, exponentielles Wachstum mit diskreter Zeit betrachtet. Einige der elementaren Grundaufgaben bis hin zur Rentenrechnung und zur Berechnung der technischen Rendite von Geldanlagen werden exemplarisch behandelt.

Anstelle der traditionell verwendeten Formeln und Tabellen zur Rentenrechnung werden Grafikrechner oder CAS-Rechner zur Lösung der Aufgaben eingesetzt.

1 Kapitalwachstum, Zins und Teuerung

Der Handel mit Geld ist durch Konventionen geprägt. Nach vereinbarten Regeln wird Geld ausgeliehen und ausgeliehenes Geld verzinst. Geldmengen wachsen, die Kaufkraft kann durch die Teuerung zerfallen, Wachstum und Zerfall sind allgegenwärtig und die vereinbarten Regeln entsprechen dem, was wir auch als Modelle bezeichnen. Es gibt zwei grundlegende Modellvorstellungen. Wachstum mit einfachem Zins und Wachstum mit Zinseszins. Darauf bauen Prototypen von Wachstums- oder Zerfallprozessen auf, etwa die Entwicklung der Kaufkraft unter dem Einfluss der Teuerung oder Kapitalentwicklung bei regelmässigen Zahlungen.

Es ist allgemeine Praxis, *Geldbeträge prinzipiell im gleichen Zeitpunkt und in der gleichen Währung zu vergleichen*. Für die Umrechnung von Währungen gelten teilweise gesetzliche Vorschriften, die hier nicht in Betracht gezogen werden. Wir gehen davon aus, dass ein Wechselkurs vereinbart sei. Wenn Geldbeträge in der gleichen Währung aber zu *verschiedenen Zeiten* verglichen werden, so ist eine Umrechnung nach einem vereinbarten Wachstumsmodell mit einem technischen Zins üblich. Über kurze Zeitspannen (meist innerhalb eines Jahres) wird mit einfachem Zins gerechnet, über längere Zeiträume mit einem Zinseszinsmodell. Allen Modellen ist gemeinsam, dass die Veränderung der Zeit nur in diskreten Schritten (Tage oder Monate oder Jahre, allgemein 'Zinsperiode' der Dauer Δt) betrachtet wird. Der Geldbetrag im Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$ wird von nun an mit K_n bezeichnet, K_0 ist das Startkapital.

1.1 Einfacher Zins

Kapitalwachstum nach dem Modell des einfachen Zinses ist ein *additiver Prozess*: in gleichen Zeitschritten wird dem Kapital ein je gleich grosser Zins zugefügt.

In Formeln: $K_{n+1} = K_n + Z$ wobei $Z = K_0 \cdot p$ den konstanten Zins für eine Zinsperiode der Dauer Δt bezeichnet. Die Proportionalitätskonstante p heisst Zinsfuss. Die direkte Berechnung für K_n ergibt $K_n = K_0 + n \cdot Z = K_0 + n \cdot p \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + n \cdot p)$

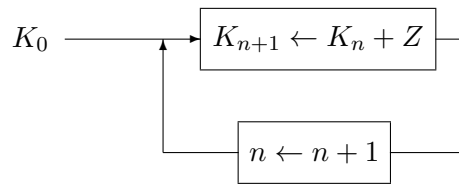


Abbildung 1: Schema mit additiver Rückkoppelung

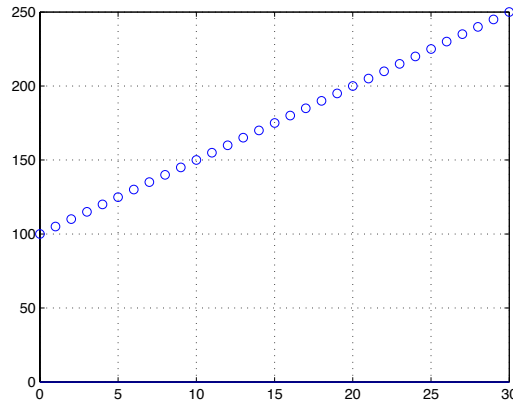


Abbildung 2: Wachstum mit einfachem Zins

Grundaufgaben zum Modell mit einfachem Zins

Es gibt die folgenden Arten von Fragen, je nachdem, welcher Parameter des Modells gesucht ist:

1. Ein Geldbetrag von 350.- CHF wird während 12 Jahren zu einfachem Zins von 4% p.a. angelegt. Wie gross ist der Endbetrag?
2. Ein Geschäftsmann kaufte eine gewisse Menge Heizöl zu 34 000 USD und verkaufte es nach 204 Tagen zu 37 400 USD. Welchem Jahreszins entspricht diese Wertsteigerung?
3. Wie lange muss ein Geldbetrag bei einfachem Zins von 4% p.a. angelegt werden, bis er sich durch den Zuwachs des Zinses erstmals verdoppelt? Wie lange dauert es bis zur zweiten Verdoppelung?
4. Der Wert einer Wohnung beträgt 300 000 CHF. Der Vermieter der Wohnung berechnet den Mietzins, indem er den Hypothekarzins zum Wert der Wohnung berechnet, zusätzlich eine verbrauchsabhängige Komponente für die Heizung und einen festen Betrag für einen Unterhaltsfonds bestimmt. Angenommen, die Hypothekarzinsen fallen von 5.5% p.a. auf 5.25% p.a., und der Vermieter gibt die Kostenreduktion voll weiter, wie gross ist dann die zu erwartende Reduktion der Monatsmiete?

1.2 Zinseszins

Kapitalwachstum nach dem Modell des Zinseszinses ist ein *multiplikativer Prozess*: in gleichen Zeitschritten verändert sich das Kapital je durch Multiplikation mit dem gleichen Faktor.

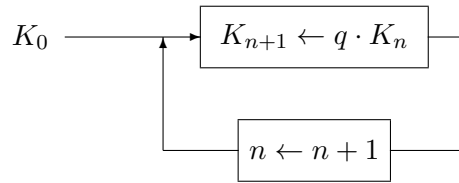


Abbildung 3: Schema mit multiplikativer Rückkopplung

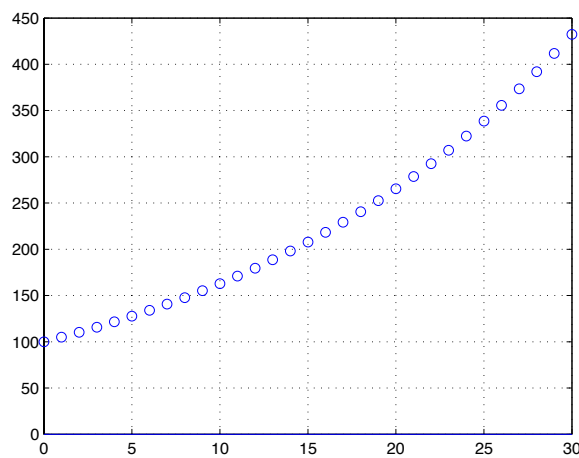


Abbildung 4: Wachstum mit Zinseszins

In Formeln: $K_{n+1} = q \cdot K_n$ wobei $q = 1 + p$ den Zinsfaktor zum Zinsfuß p für eine Zinsperiode der Dauer Δt bezeichnet. Die direkte Berechnung für K_n ergibt $K_n = q^n K_0$.

Einfacher Zins und Zinseszins im Vergleich

Das Wachstum nach dem Muster des einfachen Zinses wird auch als *linear* bezeichnet, weil der zugehörige Graph eine Gerade ist.

Wachstum unter den Bedingungen des Zinseszinses erfolgt *exponentiell*. Wird $q^n = (1 + p)^n$ nach der binomischen Formel entwickelt, so zeigt sich eine additive Struktur. Bei gegebenem Startwert K_0 sind die Werte für $K_1 = (1 + p) \cdot K_0$ nach beiden Modellen identisch.

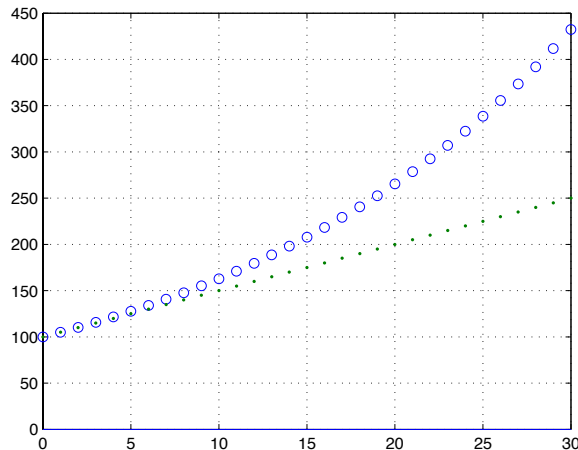


Abbildung 5: Vergleich, Wachstum mit einfachem Zins und Zinseszins

Bei K_2 treten erstmals Unterschiede zwischen den beiden auf:

$$\text{einfacher Zins} \quad K_2 = (1 + 2p) \cdot K_0$$

$$\text{Zinseszins} \quad K_2 = q^2 K_0 = (1 + 2p + p^2) \cdot K_0$$

Der Unterschied in den beiden Modellen wird im Summanden $p^2 K_0$ sichtbar. In der Sichtweise des Modells mit einfachem Zins bedeutet dieser Term einen Zins im zweiten Jahr auf dem Zinsertrag des ersten Jahres.

Natürlich lässt sich der Term $q^n = (1 + p)^n$ immer mit der binomischen Formel entwickeln. Das ist zwar meist unnötig oder umständlich, aber es zeigt sich, dass das Modell des einfachen Zinses aus jenem des Zinseszinses abgeleitet werden kann, indem die Entwicklung

$$(1 + p)^n = 1 + n \cdot p + \binom{n}{2} p^2 + \binom{n}{3} p^3 + \dots + p^n$$

nach dem zweiten Summanden abgebrochen wird. Nach der Bernoulli-Ungleichung ist ferner $(1 + p)^n \geq 1 + n \cdot p$ für alle $p > -1$. Für alle praktisch relevanten Werte des Zinsfußes p ist die Verzinsung mit Zinseszins vorteilhaft gegenüber dem einfachen Zins. Das ist auch leicht einzusehen für $p > 0$, weil jeder Term der binomischen Entwicklung, der im einfachen Zinsmodell fehlt, einen positiven Beitrag liefert. Bei *konstanter Teuerung* entwickelt sich die *Kaufkraft* des Geldes nach einem Modell mit exponentiellem Zerfall. Wenn τ die Teuerungsrate bezeichnet und q den Zinsfaktor, so berechnet sich die Kaufkraft k des Kapitals nach der Formel $k_n = q^n k_0 / \tau^n$ oder mit der netto Wachstumsrate $\omega = q/\tau$ ausgedrückt: $k_n = \omega^n \cdot k_0$.

Bei konstanter Teuerung $\tau > 0$ verliert Geld, das mit einem festen *einfachen* Zins angelegt ist, langfristig immer beliebig stark an Kaufkraft, unabhängig davon, wie gross der Zinsfuß ist. Formal geschrieben

$$k_n = K_n / \tau^n \rightarrow 0 \quad \text{mit} \quad n \rightarrow \infty.$$

Derselbe Schluss gilt auch, wenn K_n quadratisch [vgl Abschnitt 2.1] oder allgemein polynomial wächst.

Aufgaben zum Zinseszinsmodell

1. Ein Geldbetrag von 350.- CHF wird während 12 Jahren bei Zinseszins von 4% p.a. angelegt. Wie gross ist der Endbetrag?
2. Ein Geschäftsmann kaufte ein Bild zu 3200 USD und verkaufte es nach 10 Jahren zu 37400 USD.
 - (a) Welchem Jahreszins entspricht diese Wertsteigerung nach dem Zinseszinsmodell?
 - (b) Wie gross müsste der Zinsfuß bei einfachem Zins sein, um die gleiche Wertsteigerung zu erzeugen?
 - (c) In der betrachteten Zeit betrug die mittlere Jahresteuernung 3.2%. Welcher Zinsfuß würde ohne Teuerung die gleiche Steigerung der Kaufkraft wie bei der betrachteten Geldanlage mit Teuerung erzeugen?
3. Wie lange muss ein Geldbetrag bei einem Zinsfuß von 4% p.a. angelegt werden, bis er sich nach dem Zinseszinsmodell erstmals verdoppelt? Wie lange dauert es, bis der Betrag sich ein weiteres Mal verdoppelt?
4. Angenommen ein Geldbetrag wird bei einfachem Zins von 10% angelegt. Wie entwickelt sich die Kaufkraft dieses Geldes bei einer konstanten Jahresteuernung von 2%? Die Frage soll mit einer Grafik beantwortet werden. Dabei kann mit $K_0 = 1$ gerechnet werden.
5. Der Neuwert W_0 einer Computerausrüstung betrug 475 000 CHF. In der Geschäftsbuchhaltung muss der Istwert im Jahre n nach der Anschaffung aufgeführt werden. Es ist üblich, den Ansatz $W_n = 0.35 \cdot W_{n-1}$ zu verwenden.
 - (a) Welchen Istwert hat die Ausrüstung fünf Jahre nach der Anschaffung?
 - (b) Nach welcher Zeit ist die Anlage auf höchstens 1 CHF abgeschrieben? Warum ist es nicht möglich, die Anlage auf den Wert 0 abzuschreiben?
6. Im Jahre 1956 kostete ein Kilogramm Rindsbraten 8.40 Fr, im Jahr 1980 stieg der Preis auf 18.50 und auf 48.00 Fr im Jahre 2001.
Ein Arbeiter in der Maschinenindustrie hatte einen Stundenlohn von 3.37 Fr im Jahre 1956 und von 14.55 Fr im Jahre 1980, beziehungsweise 29.40 im Jahre 2001.
 - (a) Wie gross ist die mittlere Teuerung für Rindsbraten in den Zeitintervallen 1956 – 1980 und 1980 – 2001?
 - (b) Gleichet die Lohnentwicklung die Teuerung beim Rindfleisch aus?

1.3 Renditeberechnung

Die Rendite r einer Geldanlage ist definitionsgemäss ein fiktiver – einige sagen auch technischer – Zinsfuss, der unter gegebenen Bedingungen im Zinseszinsmodell dieselbe Wertsteigerung herbeiführen würde, wie die tatsächliche Geldanlage. Es gibt andere Definitionen für ‘Rendite’. Die hier vertretene Definition hat den Vorteil, dass sie Finanztransaktionen irgend welcher Art zu beliebigen Zeitpunkten berücksichtigt. Das Zinseszinsmodell mit einem festen Zinsfaktor $q := 1+r$ wird als Vergleichsstandard benutzt. Damit wird eine Definition der ‘Renditen’ durch Bezug auf einen universellen Prototypen erst ermöglicht. Verschiedene Geldanlagen lassen sich damit bezüglich Rendite rechnerisch vergleichen.

Beispiele

1. Ein Makler kaufte am 1.4.1987 ein Grundstück zu 560 CHF pro Quadratmeter und er verkauft es wieder am 1.4.2001 zu 920 CHF pro Quadratmeter. Wie gross war die jährliche Rendite?
2. Ein Makler kaufte am 1.4.1977 ein Grundstück zu 350 CHF pro Quadratmeter. Am 1.4.1998 wurde das Land als Bauland erschlossen, was mit einem Aufwand von 25 CHF pro Quadratmeter verbunden war. Das Land wurde anschliessend überbaut und am 1.4.2001 zu 920 CHF pro Quadratmeter verkauft. Wie gross war die jährliche Rendite? Welche weiteren Aufwendungen des Maklers wurden in diesem Modell nicht berücksichtigt?

Antworten

Wir vergleichen in beiden Fällen den Wert des Aufwandes und des Ertrages im gleichen Zeitpunkt, zum Beispiel am Ende der Laufzeit.

1. Nach dem Vergleichsprinzip ergeben sich die Gleichungen $560 \cdot q^{14} = 920$ und $q = r + 1$. Sie führen zur Lösung $r \approx 0.0361$ oder $r \approx 3.61\%$.
2. Das Schema liefert die Gleichungen $350q^{24} + 25q^3 = 920$ und $q = 1 + r$. Die Lösung wird numerisch mit einem Solver bestimmt: $r \approx 0.0397$ oder $r \approx 3.97\%$.
(ohne Steuern, ohne Verwaltungsaufwand)

Aufgaben zur Renditeberechnung

1. Jemand kaufte am 20.3.94 eine amerikanische Aktie zum Preis von 204.-USD. Er erhielt am 20.3.97 eine Dividende von 10.- USD und er verkaufte das Wertpapier am 20.3.00 zu einem Preis von 310 USD.
 - (a) Wie gross ist die Rendite in der Währung USD gerechnet?
 - (b) Wie gross ist die Rendite in der Währung CHF gerechnet, wenn folgende Wechselkurse bekannt sind:

Datum	20.3.94	20.3.97	20.3.00
Kurs			
1 USD ergibt	1.27 CHF	1.34 CHF	1.48 CHF

2. Eine Bank leiht jemandem 20 000 USD unter der Bedingung, dass die Schuld in 20 jährlichen Raten zu 2000 USD zu begleichen sei und die erste Zahlung ein Jahr nach Aufnahme der Schuld fällig wird.

- (a) Mit welchem Zins rechnet die Bank?
- (b) Warum entspricht dieser Zins nicht genau der effektiven Rendite aus Sicht der Bank?

2 Rentenrechnung

Rentenrechnung behandelt im einfachsten Fall die Entwicklung von Geldbeträgen, die in regelmässigen Abständen um gleichgrosse Beträge verändert werden und die einer Verzinsung mit konstantem Zinsfuss unterworfen sind. Prototypen dieser Prozesse sind das Erreichen eines Sparziels ausgehend von einem Startkapital K_0 und regelmässigen Einlagen konstanter Grösse E oder die Tilgung einer Schuld S_0 durch regelmässige Rückzahlungen der Grösse R . Für die formale Behandlung der entsprechenden Aufgaben sind zwei Summenformeln nützlich:

$$1 + 2 + 3 \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad (1)$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad (2)$$

Die Vereinfachungen der Summenterme, die in der Rentenrechnung auftreten, lassen sich bequem auch mit einem CAS berechnen. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn eher die Modellbildung als die algebraischen Umformungen eingeübt werden sollen. Wir legen Wert auf die Herleitung der Modellgleichungen, aber wir erwarten nicht eine automatisierte Klassifikation der Fälle und einen entsprechenden Einsatz von gebrauchsfertigen Formeln. Damit befreien wir uns etwas von der finanzmathematischen Fachsprache. Die Begriffe ‘vorschüssige Verzinsung’, ‘nachschüssige Verzinsung’ werden nicht ausdrücklich eingeführt. Wir überlegen uns jedoch, ob die Zahlungen zu Beginn oder am Ende einer Zinsperiode ausgeführt werden. Diese Überlegungen sind in allen Modellen mit diskretem Zeitschritt wichtig. In den später zu behandelnden biologischen Modellen machen die Begriffe ‘vorschüssig’, ‘nachschüssig’ keinen Sinn, aber die zugehörigen Überlegungen bleiben wichtig.

2.1 Ratensparen bei einfachem Zins

Angenommen, ein Arbeiter hat am 1.1. ein Guthaben der Grösse G_0 auf dem Sparkonto. Am Ende jedes Monats lässt er einen Betrag B auf das Konto überweisen. Die Bank gewährt einen Monatszins mit Zinsfuss p . Wie gross ist das Guthaben G_n am Ende des n -ten Monats? Es ist zweckmässig, induktiv vorzugehen.

Zeitpunkt	Guthaben
0	G_0
1	$G_0 + B + p \cdot G_0$
2	$G_0 + 2B + p \cdot (2G_0 + B)$
3	$G_0 + 3B + p \cdot (3G_0 + 2B + B)$
...	...
n	$G_0 + n \cdot B + p \cdot (n \cdot G_0 + (n - 1) \cdot B + (n - 2) \cdot B + \cdots + B)$

Dieser Wachstumsprozess lässt sich durch einen Algorithmus beschreiben. Das führt auf eine kleine Programmierübung. Die algebraische Auswertung und Vereinfachung des Terms

$$G_0 + n \cdot B + p \cdot (n \cdot G_0 + (n - 1) \cdot B + (n - 2) \cdot B + \dots + B)$$

mit der Summenformel (1) liefert eine übersichtliche Schlussformel

$$G_n = G_0 \cdot (1 + n \cdot p) + B \cdot (n + \frac{p}{2} \cdot n \cdot (n - 1))$$

Bemerkenswert ist der quadratische Term in n . Er zeigt, dass hier ein Wachstumsprozess zweiter Ordnung vorliegt. In der Praxis wird dieses Modell nach Bankkonvention nur innerhalb eines Jahres benutzt. Die Formel ist mit der Beschränkung $n \leq 12$ nicht besonders nützlich. Für alle praktischen Bedürfnisse reicht ein programmierter Algorithmus aus, der das Wachstum simuliert. Allerdings macht er nicht im gleichen Masse wie die algebraische Formulierung das quadratische Wachstum dieses Prozesses unmittelbar sichtbar.

Aufgaben

1. Bei einem Kleinkreditgeschäft wurde ein (einfacher) Monatszins von 1.5% vereinbart. Die Schuld $S_0 = 12000$ CHF soll in monatlichen Raten von $R = 1000$ CHF zurückbezahlt werden. Die erste Rückzahlung erfolgt am Ende des ersten Monats. Wie gross ist die Restschuld am Ende des zwölften Monats?
2. Wie gross ist der Endwert einer Geldanlage, bei der 24 Einlagen von 500 CHF je am Monatsende und ein (einfacher) Monatszins von 0.5% vereinbart wurden? Lösen Sie diese Aufgabe auf drei verschiedene Arten: mit einer algebraischen Formel, einem Programm mit Schleifenanweisung und mit der Listenoperation `sum(seq(...))`. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

2.2 Rentenrechnung mit Zinseszins

Wer einen grossen Geldbetrag benötigt, kann Schulden machen, muss diese dann aber wieder abtragen, oder der gewünschte Betrag kann in einem späteren Zeitpunkt durch Sparen erreicht werden. In beiden Fällen wird üblicherweise über die Jahre hinweg mit Zinseszins gerechnet. Rentenrechnung mit Zinseszins lässt sich auf eine einfache Art schematisch darstellen.

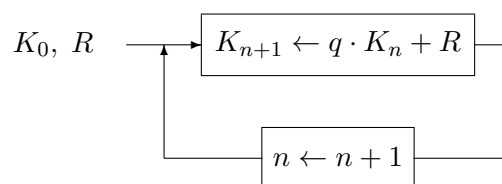


Abbildung 6: Schema mit additiver und multiplikativer Rückkoppelung

Der Prozess lässt sich rekursiv beschreiben durch einen Startwert K_0 und eine Rekursionsgleichung der Art $K_{n+1} = q \cdot K_n + R$ für $n \geq 0$. Die zugehörige explizite Darstellung für den Kapitalbetrag im Zeitpunkt n lautet:

$$K_n = q^n \cdot K_0 + R \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = q^n \cdot K_0 + R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Es ist unzweckmässig, sich diese Formel ohne die genauen Rahmenbedingungen einzuprägen und sie blindlings anzuwenden, denn in manchen Anwendungen tritt eine andere Variante des Bildungsgesetzes auf, weil die erste Rate R schon im Zeitpunkt 0 fällig sein könnte.

Eine bewährte Alternative benutzt eine Grafik des Zeitstrahles mit den Transaktionen und induktives Vorgehen, um den jeweiligen Wachstumsprozess algebraisch oder algorithmisch nachzubilden. Professionelle Anwender benutzen *Programme, die finanzmathematische Aufgaben automatisiert lösen*. Wer sie richtig anwenden will, muss die genauen gesetzlichen Bedingungen und lokale Konventionen des Geldhandels kennen. Übrigens hat das Schema von Abb. 6 die Eigenschaft, dass es im Falle $q = 1$ das Wachstum mit einfachem Zins $R := Z$ nachbilden kann und im Falle $R = 0$ jenes mit Zinseszins. Es ist in diesem Sinne ein *universelles Grundmuster für alle finanzmathematischen Prozesse*, welche bisher betrachtet wurden.

Beispiele für Grundaufgaben

1. Ein Angestellter schliesst im Alter von 30 Jahren eine Vorsorgeversicherung ab. Er verpflichtet sich, ab Vertragsbeginn bis zum 63. Lebensjahr jährlich 6000 CHF an die Versicherung zu bezahlen. Diese gewährt ihm 3.5% Jahreszins auf dem Guthaben. Wie gross wird das Guthaben nach der letzten Zahlung sein? Wie gross ist der Barwert dieses Guthabens im Zeitpunkt des Vertragsabschlusses?
2. Beim Erwerb eines Hauses musste ein Eigentümer von der Bank 600 000 CHF ausleihen. Es wurde ein Jahreszins von 5% vereinbart und eine Rückzahlung in 30 gleichen Raten der Grösse R . Wie gross ist R ?
3. Eine Schuld der Grösse S_0 wird mit dem Zinsfuss p jährlich verzinst und durch jährliche Raten der Grösse $R > p \cdot S_0$ zurückbezahlt. Die erste Rate ist ein Jahr nach Vertragsabschluss fällig. Wie lange dauert die Rückzahlung?
 - (a) Schreiben Sie ein Programm, das zu den Eingaben S_0, p, R die Laufzeit n bis zur endgültigen Tilgung der Schuld und die Grösse der letzten Rückzahlung R_n ausgibt. Erweitern Sie das Programm so, dass der Tilgungsplan ausgegeben wird, das ist die Liste der jeweils nach einer Rückzahlung übrigbleibenden Schuldbeträge bis die Schuld abgetragen ist. Welche Antworten geben die beiden Programmvarianten für $S_0 = 600\,000$ CHF, $p = 5\%$, $R = 40\,000$?
 - (b) Wie lässt sich die Aufgabe formal und algebraisch lösen?

Antworten

Es ist zweckmässig, die Aufgaben durch induktives Vorgehen zu lösen. Zur Veranschaulichung lassen sich die Prozesse auf einer Zahlgeraden graphisch darstellen.

1. Mit der Abkürzung $q = 1 + p$ liefert induktives Vorgehen:

Zeitpunkt	Guthaben
0	$K_0 = R$
1	$K_1 = R + qR$
2	$K_2 = R + qR + q^2R$
3	$K_3 = R + qR + q^2R + q^3R$
...	...
n	$K_n = R + qR + q^2R + \dots + q^nR$

Die Summenformel (2) für geometrische Reihen liefert

$$G_n = R \cdot \sum_{k=0}^n q^k = R \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Der Wert des Guthabens K_{33} wird 380 719 CHF (auf 1 CHF gerundet).

2. Der Barwert aller 30 Rückzahlungen ist gleich der Schuld

$$S_0 = q^{-1}R \cdot \sum_{k=0}^{29} q^{-k}.$$

Daraus ergibt sich $R = 39\,031$ CHF (auf ganze Zahlen gerundet).

3. (a) Ein Programm rumpf, der die Amortisation einer Schuld S mit Rückzahlungen R und Zinsfuß p simuliert, lautet:

```

tilge(S,R,p)
prgm
local j,q
q:=1+p
If S*p<R Then
  j:=1
  While S*q>R
    S:=S*q-R
    j:=j+1
  EndWhile
  Disp j, q*S
Else
  Disp "R zu klein"
EndIf
EndPrgm

```

Bemerkung:

Es wird stillschweigend angenommen, dass die Eingaben $S > 0$, $R > 0$, $p \geq 0$ erfüllen.

Beispiel: Mit den Eingaben $S = 600\,000$, $R = 40\,000$, $p = 0.05$ liefert dieses Programm folgende Antworten:

Laufzeit $n = 29$ Jahre und 16 772.9 CHF als Restzahlung.

(b) Die Tilgungsbedingung lautet: Der Barwert der Schuld S_0 ist gleich gross wie der Barwert aller Einzahlungen bis zum Zeitpunkt n . Da die erste Rate in einem Jahr nach Beginn des Vertrages fällig wird, bedeutet dies:

$$S_0 = R(q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-n}) = q^{-1}R \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^{-k} = q^{-1}R \cdot \frac{q^{-n} - 1}{q^{-1} - 1}$$

Da diese Gleichung in der Regel nicht ganzzahlig lösbar sein wird, ist eine abschliessende Korrektur nötig. Die gefundene Zahl n_0 muss auf die nächste ganze Zahl aufgerundet werden und die letzte reduzierte Rate ist zu bestimmen.

Im Falle $R > qS_0$ existiert eine formale Lösung der Tilgungsgleichung

$$n_0 = \frac{\log(R) - \log(R - pS_0)}{\log(q)}$$

aus der sich die gesuchte ganze Zahl n ergibt. Im Beispiel ist $n_0 \approx 28.4$, also $n = 29$ und die letzte Zahlung wäre in diesem Falle

$$S_0q^n - R(q^n - q)/p \approx 16\,772.9 \text{ CHF}$$

Natürlich findet das CAS des Taschenrechners eine formale Lösung für n_0 , ebenso wie ein Solver n_0 numerisch bestimmen kann. Es ist aber mindestens so sinnvoll, die Aufgabe durch Simulation der Tilgung zu lösen.

2.3 Vermischte Aufgaben und Anwendungen

1. Ein Betrieb erwirbt eine Produktionsanlage und muss dazu 1.2 Millionen Franken zu 5% Jahreszins aufnehmen. Die Schuld ist in 10 gleich grossen Tilgungsraten, die jeweils am Jahresende fällig werden, zurückzuzahlen. Wie gross ist die jährliche Tilgungsrate?
2. Beim Kauf eines Hauses musste X 520 000 CHF zu 5.5% Jahreszins auf den 1.1. 94 aufnehmen. Zur Tilgung der Schuld und zur Bezahlung der Zinsen stehen X jeweils am Jahresende 35 000 CHF zur Verfügung. Nach wie vielen Zahlungen wird die Schuld von X getilgt sein? Wie gross wird die letzte Zahlung noch sein?
3. Tom ist 42. Er will sich mit 62 Jahren pensionieren lassen. Eine Versicherung schlägt ihm vor, jedes Jahr einen Betrag von B Franken an eine Vorsorgeversicherung einzuzahlen, erstmals am 43. und letztmals am 61. Geburtstag. Wie gross muss B gewählt werden, damit bei einem Zinsfuss von 3% das Sparziel von 150 000 CHF bis zum 62. Geburtstag erreicht ist?
4. Ein Pate schenkt seinem Patenkind seit der Geburt und bis am 20. Geburtstag jeweils CHF 200.– in Bar.
 - (a) Wie gross ist der Barwert dieser Geschenke bei einem angenommenen Zins von 3%?
 - (b) Wie gross ist der Endwert dieser Geschenke, wenn ein Zins von 4% angenommen wird?
5. Ein Gönner schenkt einem Blindenheim jährlich CHF 1000.– zum Jahresende.
 - (a) Wie gross ist der Barwert seiner Geschenke, wenn mit einer Laufzeit von 25 Jahren bei 4% Zins gerechnet wird?
 - (b) Wie gross müsste eine Schenkung sein, um bei 4% Jahreszins eine ‘ewige’ Rente von 1000 CHF im Jahr zu speisen?
6. Ein Unternehmer möchte sich das exklusive Nutzungsrecht an einer Mineralquelle sichern. Der Besitzer der Quelle verlangt eine jährlich fällige Zahlung am 1.1. von 120000 CHF.

Der Unternehmer ist einverstanden, aber er will ein langfristiges Angebot zu ‘gleichen Bedingungen’ unter Annahme eines technischen Zinses von 4% p.a. Mit welcher Barzahlung könnte der Unternehmer sich die Rechte

 - (a) für die kommenden 100 Jahre erwerben?
 - (b) auf ewig sichern?

Wie gross ist die vom Unternehmer zu leistende Barzahlung in jeder der beiden Varianten?
7. Wie gross ist die Rendite einer Geldanlage, bei der 24 Einlagen von 500 CHF je am Ende des Monats und ein einfacher Monatszins von 0.5% vereinbart wurden?

8. Eine plausible Schätzung sagt, dass die Ausbildung jedes Mediziners den Staat rund 10^6 CHF kostet. Nora hat Medizin studiert und 2007 im Alter von 33 Jahren eine Praxis eröffnet. Seither bezahlt sie jährlich 60 000 CHF Steuern.

Annahmen:

- Wir betrachten die Ausbildungskosten von 10^6 CHF als ‘Schuld Noras der Allgemeinheit gegenüber’, die mit dem Ende des Studiums am 30.6.2003 fällig wurde.
- Wir rechnen mit einem Jahreszins von 4%.
- Wir betrachten die Steuern als jährlich gleichbleibende Rate, um die ‘Schuld’ zu tilgen. Die erste Rate wurde am 30.6.2009 zurückbezahlt, die anderen Raten erfolgen im Abstand von einem Jahr.

Wie alt wird Nora sein, wenn ihre ‘Schuld’ getilgt sein wird?

9. Tina hat zwei Möglichkeiten, 10'000 CHF anzulegen:

[ZZ] Laufzeit 13 Jahre, Zinseszins mit Zinsfuss 2.75%.

[EZ] Laufzeit 10 Jahre, einfacher Zins, Zinsfuss 3.25%.

- (a) Bei welcher der beiden Anlagen ergibt sich nach einer Laufzeit von 10 Jahren das grössere Guthaben?
- (b) Wie gross sind die beiden Renditen über die jeweilige Laufzeit gesehen?

10. Wenn ich eine Waschmaschine kaufe, so kann ich wählen zwischen zwei Varianten:

- (a) Ich bezahle beim Kauf sofort 2400 CHF.
- (b) Ich bezahle sofort 700 CHF und verpflichte mich, in den folgenden drei Jahren weitere Jahresraten von 700 CHF zu entrichten.

Bei welchem technischen Zinsfuss wären beide Varianten gleichwertig?

Warum muss Variante (b) in der Praxis teurer sein als Variante (a)?

2.4 Modell und Wirklichkeit

Die bisher behandelten Modelle beruhen auf Annahmen und Konventionen. Beide Voraussetzungen sind in einem gewissen Masse willkürlich. Vereinfachungen werden erzielt, indem manche Parameter in den Modellen als konstant angenommen werden, etwa der Zinsfuss oder die jährlich zu entrichtende Rate. In der Praxis wird der Zinsfuss durch den Gang des Geldmarktes bestimmt. Er ist nicht beliebig lange konstant. Ferner ist jeder Geldbetrag üblicherweise Steuern unterworfen und die Dienstleistungen der Geldinstitute müssen ebenfalls abgegolten werden. Banken verlangen Entschädigungen für administrative Umtriebe. Eine realistische Faustregel lautet: *Zins \approx Teuerung plus Steuern*. Sie ist durch keinerlei Gesetze garantiert und drückt einfach die Hoffnung der künftigen Rentner aus, dass mindestens die Kaufkraft des gesparten Geldes in etwa erhalten bleibe.

Wer es genau wissen will, muss die jeweils gültigen Daten kennen. Dann wäre eine Tabellenkalkulation ein geeignetes Werkzeug, um die Entwicklung eines Kapitalbetrages genau aufzuzeichnen und zu verfolgen. Auf diese Art lassen sich aber nur vergangene Geldgeschäfte erfassen.

Für die Finanzplanung ist aber auch der Blick in eine unbestimmte Zukunft nötig. In diesem Rahmen sind Modellrechnungen auch mit vereinfachten Annahmen nützlich, sofern uns bewusst ist, wie sich die Annahmen auf die Schlussfolgerungen auswirken. Zudem ist es sinnvoll, Renditen oder mittlere Teuerungsraten als fiktive Werte eines Zinsfusses zu berechnen, um damit einen Vergleichsmaßstab für Kapitalanlagen zu finden.

3 Musterprüfung

Erläutern Sie in jeder Aufgabe das verwendete Wachstumsmodell mit Worten und Formeln. Zeichnen Sie die wesentlichen Transaktionen schematisch auf einer Zeitachse ein. Geben Sie genau an, wie Sie Ihren Rechner einsetzen und protokollieren Sie alle wesentlichen Ein- und Ausgaben.

1. Anton hat am 1.4.2005 seiner Schwester 10'000.- CHF geliehen. Sie bezahlte das Geld am 1.4.2013 inklusive 5% einfachen Zins zurück. Wie gross ist Rückzahlung am 1.4.2013 und wie gross war die Rendite dieser 'Geldanlage'?
2. Ein Verein macht ein Angebot: Die Mitgliedschaft kostet jährlich 60.- CHF. Wer jedoch sofort 1000.- CHF bezahlt, erwirbt die lebenslängliche Mitgliedschaft. Wie lange müsste ein Mitglied im Verein bleiben, damit sich die lebenslängliche Mitgliedschaft lohnt, wenn der Jahresbeitrag als unveränderlich angenommen wird und mit Zinseszins bei einem Zinsfuss von 4% gerechnet wird?
3. Carlo hat erstmals am 1.5.1993 für seine Tochter Dora bei einer Studienversicherung 1200.- CHF einbezahlt und die Einzahlungen jährlich wiederholt bis und mit dem 1.5.2010. Dora wurde am 1.5.2011 volljährig und möchte über das Geld verfügen.
 - (a) Wie gross wäre der Kontostand am 1.5.2011 bei einem angenommenen Zinsfuss von 4.5% nach dem Zinseszinsmodell?
 - (b) Mit welcher einmaligen Zahlung am 1.5.1993 hätte Carlo bei 4.5% p.a. das gleiche Sparziel erreichen können?
 - (c) Die Versicherung leistete am 1.5.2011 eine einmalige Auszahlung von 28'000.- CHF. Mit welchem effektiven Jahreszins wurden Carlo's Zahlungen von der Versicherung [nach dem Zinseszinsmodell] verzinst?
4. Ein Händler kaufte am 7.5.2010 eine gewisse Menge Gold zu 2.4 Mio CHF. Seit dem 7.5.2010 musste er jährlich für Versicherung und Depotgebühren 15'000 CHF bezahlen. Er verkaufte einen Teil des Goldes am 7.5.2011 zu 1.6 Mio CHF. Darauf wurden die Gebühren in den Jahren 2012 und 2013 auf 10'000 CHF gesenkt. Am 7.5.2013 verkaufte er den Rest zu 1.7 Mio CHF. Welche Rendite hat dieses Geschäft erbracht?
5. Tom möchte ein Auto kaufen. Ein Garagist hat folgendes Angebot unterbreitet:
 - [A] Anzahlung 10'000 CHF bei Übernahme des Autos am 15.4.2013, dann jährliche Zahlungen von 6000 CHF fällig am 15.4. der Jahre 2014, 2015, 2016.
 - [B] Barkauf für 24'000 CHF

Bei welchem technischen Zins wären beide Angebote gleichwertig?