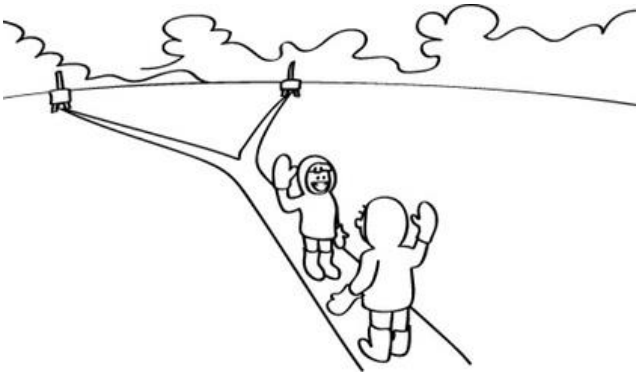
Paper Computer Science Experiment ❺

Great Principles of Computing	**Computation (NP-Vollständigkeit)**
Thema	**Steinerbäume**
Unterrichtsform	Entdeckendes Lernen, Einzelarbeit, Lernen am Modell
Voraussetzung	Bäume tauchen vielerorts auf, insbesondere bei Versorgungsnetzen für z. B. Strom oder Wasser oder bei der Planung von Leiterbahnen für Chips. In manchen Fällen steht die geometrische Lage der Knoten fest, aber es können zusätzliche Knoten frei gewählt werden. Ein anschauliches Beispiel für solch eine Situation ist die Frage nach kürzesten Verbindungswegen zwischen verschiedenen Angellöchern auf einem zugefrorenen See. Es gibt keinerlei Vorgaben für den Verlauf der Wege, ausser dass sie insgesamt möglichst kurz sein sollen, und daher nur geradlinig verlaufen können.  Quelle: http://csunplugged.com/steiner-trees

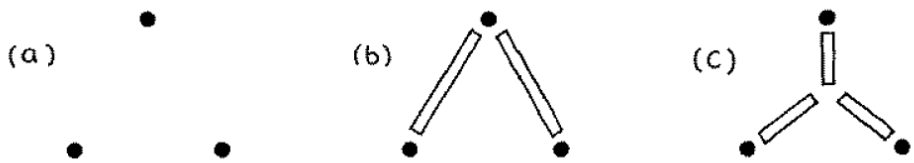
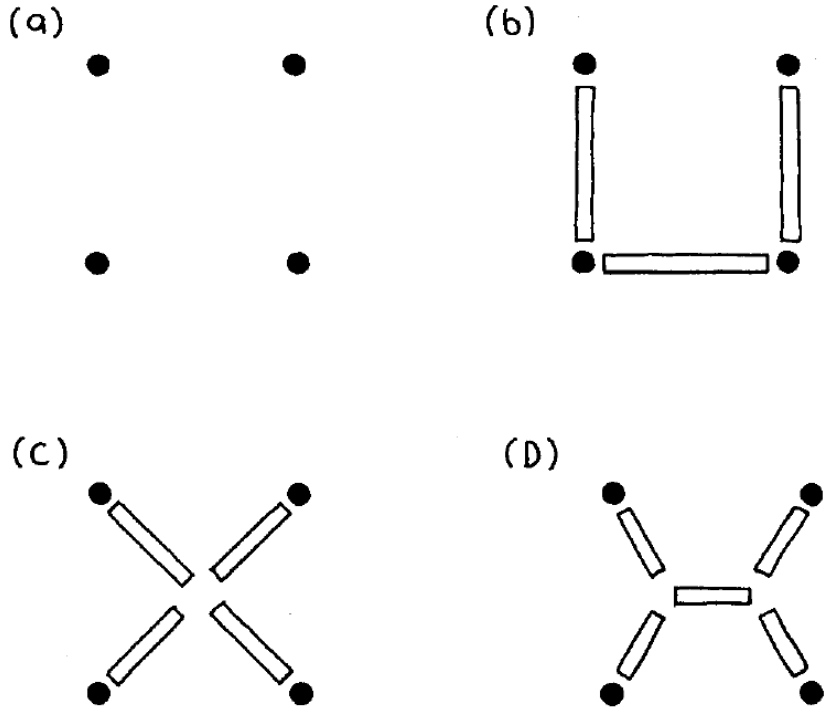
Material	• Papier und Bleistift für die Indoor-Variante • Kreide und Messband für draussen • Seifenblasenmodell (vgl. Varianten) 
Zeitdauer	Erklärungen plus Versuche und Messungen: 20 Min.
Vorgehen	Die Schüler/innen zeichnen einige Knoten (Angellöcher auf einem zugefroren See) auf ein Blatt Papier und suchen nach Möglichkeiten, diese Knoten durch einen möglichst kurzen Baum miteinander zu verbinden. („Hilfsknoten“ sind erlaubt). In der Outdoor-Variante zeichnen die Schüler/innen in Teams die Bohrlöcher im Eis und das Wegsystem mit Kreide direkt auf den Pausenhof. Welche Gruppe findet die kürzeste Gesamtlänge? Vorallem durch Experimentieren an geometrischen Grundformen wie gleichseitigem Dreieck, Quadrat und Rechteck sieht man schnell, dass die Gesamtlänge der Baumkanten durch das Hinzufügen von Zwischenknoten kleiner werden kann.  Quelle: http://csunplugged.com/sites/default/files/activity_pdfs_full/unplugged-15-steiner_trees_0.pdf Die Gesamtlänge des Baumes mit einem zusätzlichen Knoten in

Abbildung (c) ist kleiner als diejenige des minimal aufspannenden Baumes in der Situation (b), nämlich $\sqrt{3} \approx 1.732$ anstatt 2.

Die Frage nach dem minimalen Baum zwischen Knoten fester geometrischer Lage führt auf so genannte Steinerbäume (nach dem Schweizer Mathematiker Jacob Steiner (1796–1863)).

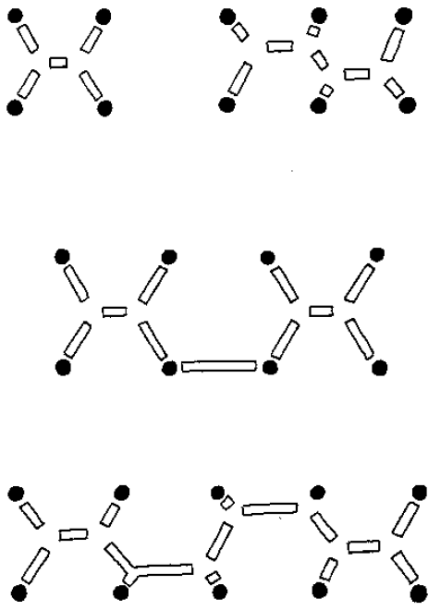


Quelle: http://csunplugged.com/sites/default/files/activity_pdfs_full/unplugged-15-steiner_trees_0.pdf

Ein minimal aufspannender Baum für die Situation (a) der 4 Bohrlöcher, welche ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 bilden, hat in der Figur (b) die Gesamtlänge 3. Man kann diesen minimal aufspannenden Baum noch unterbieten, indem man einen neuen Knoten hinzufügt. Das Verbindungsnetzwerk der Abbildung (c) hat nun nur noch die Gesamtlänge $2\sqrt{2} \approx 2.828$. Aber es geht noch besser, indem man wie in der Situation (d) zwei neue Knoten einfügt. Wenn wir davon ausgehen, dass alles 120° Winkel sind (eine Grenzbedingung für Steinerbäume), so ergibt sich eine Gesamtstreckenlänge von $1 + \sqrt{3} \approx 2.732$.

Eine interessante Erweiterung der Suche nach Steinerbäumen in geometrischen Grundformen bildet eine „Leiter“:

Quelle: http://csunplugged.com/sites/default/files/activity_pdfs_full/unplugged-15-steiner_trees_0.pdf



Die Steinerbäume für Leitern mit 2, 3, 4 und 5 Sprossen

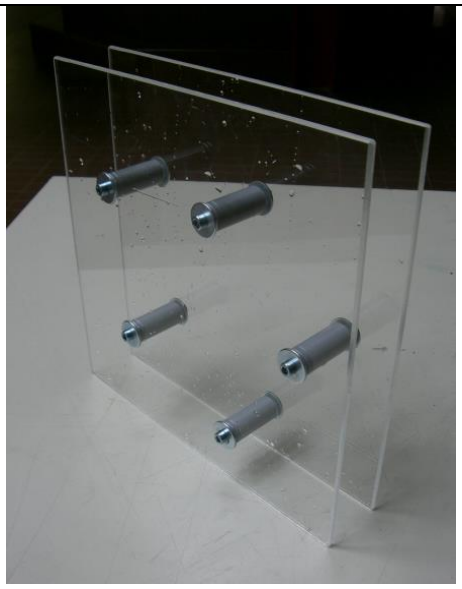
Quelle: http://csunplugged.com/sites/default/files/activity_pdfs_full/unplugged-15-steiner_trees_0.pdf

Interessanterweise wiederholen sich die Grundformen der ersten beiden Steinerbäume in Leitern mit mehr Sprossen immer wieder.

Es sind keine effizienten Algorithmen für das optimale Platzieren von Steiner-Knoten bekannt, so dass die Gesamtwegstrecke des entsprechenden aufspannenden Steiner-Baumes minimiert wird. (Das Problem ist NP-vollständig).

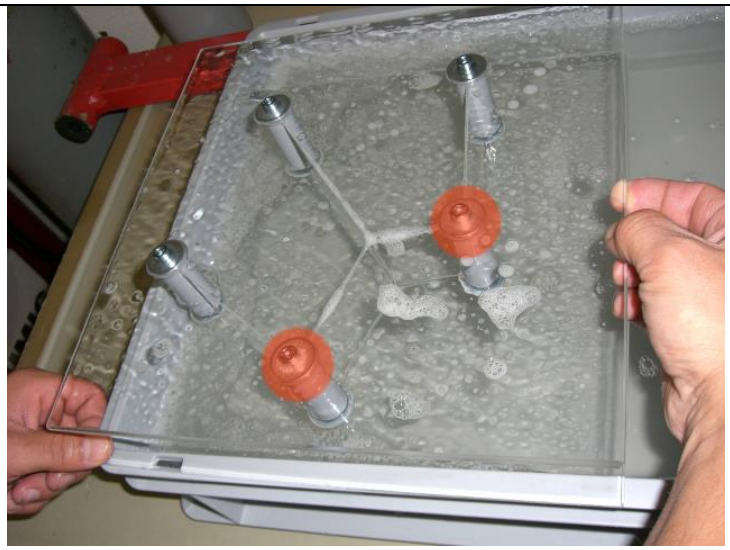
Varianten

Um ein Gefühl für die Formenvielfalt von Steinerbäumen zu entwickeln, kann man mit Seifenblasen experimentieren. Man nimmt zwei gleich grosse Plexiglasscheiben und befestigt senkrecht dazwischen Stäbe, die die Knoten repräsentieren.



Dann wird das Ganze in Seifenblasenflüssigkeit getaucht und wieder heraus genommen.

Die Seifenhaut bildet einen Steinerbaum zwischen den Stäben! Allerdings ist es nicht unbedingt ein minimaler Steinerbaum. Die Seifenhäute bilden zwar Minimalflächen, doch muss dabei die Gesamtlänge des Baumes nicht unbedingt minimal sein. Es entsteht kein globales, sondern nur ein lokales Minimum.



Die Seifenhaut in der obigen Abbildung bildet keinen Steinerbaum, da die Winkelbedingung für Steinerbäume an den orange markierten Stellen nicht erfüllt ist: In einem Steinerbaum schneiden sich keine zwei seiner Kanten (d.h. Kanten mit einem gemeinsamen Knoten) unter einem Winkel von weniger als 120° (vgl. hierzu die Konstruktion des Toricelli-Punktes für das Fermatproblem z.B. durch Umkreise).

Wenn die gleiche Anordnung wiederholt eingetaucht, so sieht man, wie unterschiedlich die Steinerbäume aussehen können und man bekommt eine Ahnung von den unzählig vielen Möglichkeiten, die Steinerpunkte zu setzen.

Weitere Ideen

Computer Science Unplugged: Ice Roads
http://csunplugged.com/steiner-trees

Lesenswerte Diplomarbeit der TU Berlin zum Steinerbaumproblem
http://www.user.tu-berlin.de/philipp.maeser/Diplomarbeit_Steinerbaumproblem.pdf

Uwe Schöning: Ideen der Informatik
Kapitel 2.4 Steiner-Bäume S. 43ff
In diesem Kapitel findet sich auch die Geschichte der Fluggesellschaft Delta Airlines, welche im Rechtsstreit mit der Telefongesellschaft AT&T mit Steinerbäumen Kosten einsparen konnte.

Bei der Beschäftigung mit NP-vollständigen Problemen darf natürlich das 4-Farbentheorem nicht fehlen:

Quelle: http://csunplugged.com/graph-colouring

Computer Science Unplugged: The Poor Cartographer
http://csunplugged.com/graph-colouring

Eine lohnenswerte Erfahrung, wie schnell die Komplexität eines Problems ansteigen kann, vermittelt die folgende Aktivität (incl. allen notwendigen Kopiervorlagen):
Abenteuer Informatik: Das Affenpuzzle
http://www.abenteuer-informatik.de/PDF/affenpuzzle1_a234.pdf

Ein konkretes Zahlenbeispiel, wie die Rechenzeit zur Lösung des Affenpuzzles abgeschätzt werden kann, findet sich hier:
http://www.abenteuer-informatik.de/PDF/Affenpuzzle_GeroScholz.pdf